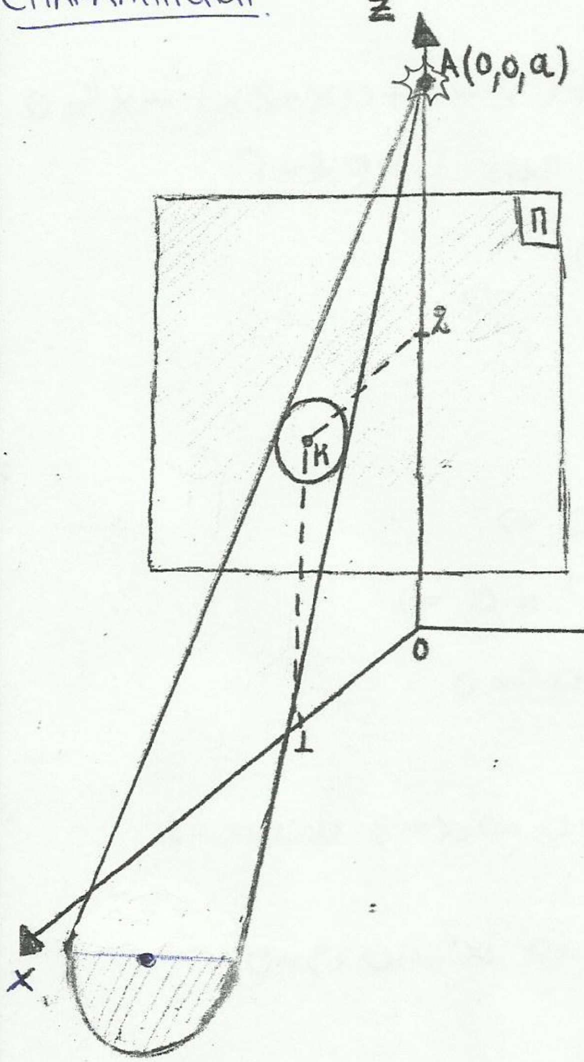
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ



• Ένας κυκλικός δίσκος έχει κέντρο $K(1,2,0)$, ακτίνα $\rho=1$ και το επίπεδό του είναι παράλληλο προς το επίπεδο yoz. Ο δίσκος φωτίζεται από μια πηγή που βρίσκεται στο σημείο $A(0,0,a)$. Να βρεθεί το a έτσι ώστε η σκιά του δίσκου επί του επιπέδου xoy να είναι παραβολή. Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις της παραβολής. Για ποια τιμή του a η σκιά του δίσκου στο επίπεδο xoy είναι ισοσκελής υπερβολή; •

Ας είναι οι ακτίνες της φωτεινής πηγής οι γενέτειρες του κυκλικού δίσκου, τον οποίο θεωρούμε (c), οι οποίες εφάπτονται σε αυτόν.

Άρα, θα έχουν μορφή (με σημείο διέλευσης το $A(0,0,a)$ και έστω διάνυσμα $\vec{a}=(k,\lambda,\mu)$): $(\varepsilon): \frac{x-0}{k}=\frac{y-0}{\lambda}=\frac{z-a}{\mu} \Rightarrow \frac{x}{k}=\frac{y}{\lambda}=\frac{z-a}{\mu}$

Θέτουμε την (ε) ίση με t.

και παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$x=k\cdot t \quad \text{και} \quad y=\lambda t \quad \text{και} \quad z=\mu t-a. \quad (1)$$

Επίσης, ο κυκλικός δίσκος έχει την εξίσωση:

$$(c): \begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=1 \\ x=1 \end{cases} \quad (2)$$

Από, την (1) στη (2) έχουμε:

$$x=1 \Rightarrow k\cdot t=1 \Rightarrow \boxed{t=1/k} \quad (3)$$

και

$$(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=1 \Rightarrow (k\cdot t-1)^2+(\lambda t)^2+(\mu t-a-2)^2=1$$

$$\xRightarrow{(3)} (1-1)^2+\frac{\lambda^2}{k^2}+\left(\frac{\mu}{k}-a-2\right)^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{x} + a - 2\right)^2 = 1 \Rightarrow y^2 + (z - a + ax - 2x)^2 - x^2 = 0$$

- Άρα, το περίγραμμα της σκιάς είναι της μορφής

$$(C'): \begin{cases} y^2 + (z - a + ax - 2x)^2 - x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + (-a + ax - 2x)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + (a-2)^2 x^2 - 2a(\alpha - 2)x - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((a-2)^2 - 1)x^2 - 2a(a-2)x + y^2 + a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 - 4a + 3)x^2 - 2a(a-2)x + y^2 + a^2 = 0$$

α' τρόπος

Αφού πρέπει παραβολή τότε $\alpha^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 3$ και $\alpha = 1$

β' τρόπος

Με τις αναλλοίωτες αρκεί $d = \begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4a + 3 = 0$

οι εξισώσεις παραβολής θα είναι:

$$-2(-1)x + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow y^2 = -(2x+1).$$

και

$$-2 \cdot 3x + y^2 + 9 = 0 \Rightarrow y^2 = 6x - 9.$$

Ισοσκελής υπερβολή $\left\{ a = \beta \text{ για } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \right\}$

Άρα, $(a^2 - 4a + 3)\left(x^2 - \frac{2a(a-2)}{a^2 - 4a + 3}x\right) + y^2 + a^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a-3)(a-1) \cdot \left(x^2 - \frac{2a(a-2)}{a^2 - 4a + 3}x + \frac{a^2 (a-2)^2}{(a^2 - 4a + 3)^2}\right) + y^2 + a^2 - \frac{\alpha^2 (a-2)^2}{a^2 - 4a + 3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-3)(a-1) \cdot \left(x - \frac{a(a-2)}{(a-1)(a-3)}\right)^2 + y^2 + a^2 = \frac{a^2 (a-2)^2}{(\alpha - 3)(a-1)}$$

Αναγκαστικά πρέπει $(a-3)(a-1) = -1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$